

Aufgaben zum Vektorprodukt

1.0 Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

$$1.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1.2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad 1.3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.0 Prüfen Sie die folgenden Vektoren mithilfe des Vektorprodukts auf Kollinearität.

$$2.1 \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad 2.2 \vec{r} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -2,6 \\ -1,8 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -54 \\ 31,2 \\ 21,6 \end{pmatrix}$$

3.0 Bestimmen Sie die Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Gleichungen erfüllt sind.

$$3.1 \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \quad 3.2 \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b+6 \\ -3c+6 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

4.0 Untersuchen Sie die folgenden drei Vektoren mithilfe des Spatprodukts auf lineare Abhängigkeit.

$$4.1 \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad 4.2 \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.0 Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen ($r, s \in \mathbb{R}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$).

$$5.1 r(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{r} \vec{u} \times \vec{r} \vec{v}$$

$$5.2 (r+s)(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{r} \vec{u} \times \vec{s} \vec{v}$$

$$5.3 (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{u} = \vec{r} \times \vec{u} + \vec{s} \times \vec{u}$$

$$5.4 \vec{u} \times (\vec{r} + \vec{s}) = -\vec{r} \times \vec{u} - \vec{s} \times \vec{u}$$

6.0 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind drei beliebige Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 , wobei keiner von ihnen der Nullvektor ist. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

6.1 $\vec{a} \times (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{0}$

6.2 $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

6.3 $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

6.4 $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

6.5 $\vec{a} \circ (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$

7.0 Suchen und erläutern Sie den Fehler in folgenden Aufgaben.

7.1 $\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$

7.2 $\vec{a} \times (\vec{b} \circ \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{a} \times \vec{c})$

7.3 $\vec{a} \times (\vec{b} - 2\vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - 2\vec{c} \times \vec{a}$

7.4 $\vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b}$

7.5 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b}$

7.6 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

8.0 Gegeben sind die Punkte $A(1/1/0)$, $B(0/3/1)$, $C(-2/4/4)$ und $D(-1/2/3)$, die das Parallelogramm ABCD bilden.

8.1 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms und den Schnittwinkel dieser Diagonalen.

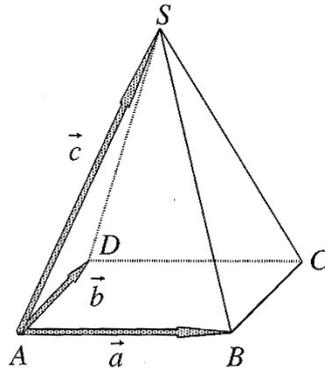
8.2 Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms.

9. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC mit $A(1/-1/7)$, $B(1/5/11)$ und $C(3/4/-5)$.

- 10 Die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugen einen Spat.

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens sowie der Oberfläche dieses Spats.

- 11 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCS mit $A(1/-2/5)$, $B(1/3/-5)$, $C(0/11/7)$ und $S(7/-3/5)$.
- 12 Berechnen Sie das Volumen einer vierseitigen Pyramide ABCDS mit $A(2/-1/0)$, $B(-1/0/2)$, $C(3/1/-5)$, $D(6/0/-7)$ und $S(4/-3/7)$ mit Hilfe der folgenden Skizze.



- 13 Die Punkte O , $A(1/0/-2)$, $B(-1/2/2)$ und $C_k(k/-k/-2-k)$ bilden jeweils ein Tetraeder. Berechnen Sie alle Werte von k , für die das Volumen des zugehörigen Tetraeders 1 VE beträgt. (Abitur 2010 BII)
- 14.0 Auf einem Spielplatz wird über dem Sandkasten ein dreieckiges Sonnensegel angebracht. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Punkte $A_1(0/0/0)$, $A_2(5/0/0)$, $A_3(5/5/0)$ und $A_4(0/5/0)$ die Ecken des Sandkastens beschreiben. Das Sonnensegel wird im Punkt A_3 fest an der Sandkastenecke und in den Punkten $B_k(4/0/k)$ und $C_k(0/4/k)$ jeweils an einer senkrechten Stütze befestigt. Dabei ist k ein reeller Parameter. Für die Einheiten auf den Koordinatenachsen gilt jeweils 1 LE = 1 m, bei den Berechnungen kann auf die Verwendung der Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2012 BI)
- 14.1 Bestimmen Sie k so, dass das Sonnensegel die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.
- Setzen Sie für die folgenden Aufgaben $k = 2,5$.
- 14.2 Stellen Sie den Sandkasten und das Sonnensegel in einer Skizze im kartesischen Koordinatensystem dar.
- 14.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnensegels.

15.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1/3|-2)$, $B_k(k/0|1)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $C(-1/6|0)$ gegeben. (Abitur 2014 BII)

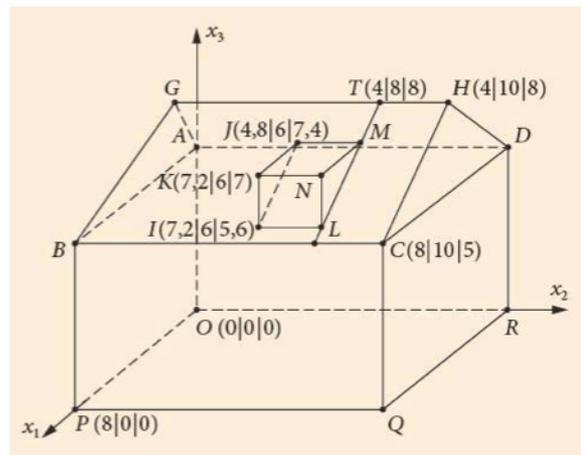
15.1 Bestimmen Sie den Wert für k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und \overrightarrow{AC} orthogonal zueinander sind.

15.2 Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt $F(k)$ des Dreiecks AB_kC minimal wird. Hinweis: Es genügt den Term unter der Wurzel zu betrachten.

(Mögliches Teilergebnis: $F(k) = \frac{1}{2} \sqrt{13k^2 - 38k + 322}$)

16.0 Die Abbildung zeigt modellhaft ein Einfamilienhaus, das auf einer horizontalen Fläche steht. Auf einer der beiden rechteckigen Dachflächen soll eine Dachgaube errichtet werden. Die Punkte A, B, C, D, O, P, Q und R sind die Eckpunkte eines Quaders.

Das gerade dreiseitige Prisma LMNIJK stellt die Dachgaube dar, die Strecke \overline{GH} den First des Dachs, d.h. die obere waagrechte Dachkante. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d.h. das Haus ist 10 m lang.



16.1 Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Dachfläche, die im Modell durch das Rechteck BCHG dargestellt wird.

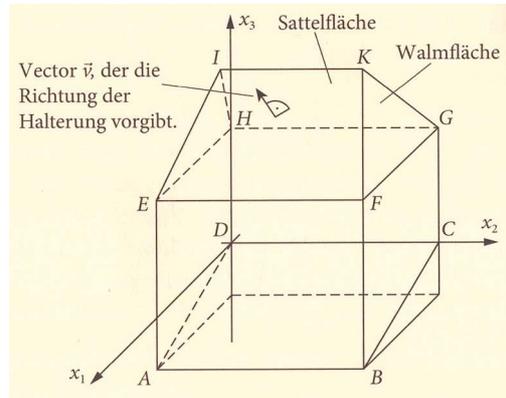
16.2 Berechnen Sie, welchen Rauminhalt die Dachgaube hat.

17 Auf einer Werft soll ein Regenschutz in Form eines Parallelogramms zwischen vier Befestigungspunkten gespannt werden. Die Punkte besitzen die folgenden Koordinaten (Bezugsmaß: m): $P_1(4/2/3)$, $P_2(10/6/4)$, $P_3(12/9/6)$ und $P_4(6/5/5)$.

Berechnen Sie, wie viel m^2 Plane mindestens erforderlich sind. Bestimmen Sie auch die Länge der Drahtseile, die man zur Verstärkung diagonal aufspannt.

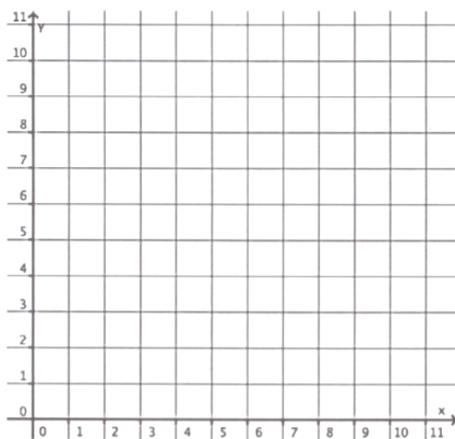
- 18 Die abgebildete Skizze zeigt ein an einem Hang gebautes Haus mit der Grundform eines Quaders und einem Dach, das als Walmdach ausgeführt ist. Auf der Sattelfläche wird eine Halterung für eine Antenne angebracht, die senkrecht zur Sattelfläche stehen soll. Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE entspricht 1 m. Die Maße des Hauses sind durch die Koordinaten folgender Punkte gegeben: $A(8/0/-3)$, $B(8/10/-3)$, $D(0/0/0)$, $E(8/0/4)$, $I(4/2/8)$ und $K(4/8/8)$.

Berechnen Sie den Vektor \vec{v} .



- 19 Zeichnen Sie in das unten abgebildete Koordinatensystem des \mathbb{R}^2 je einen Repräsentanten der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ein, welche die drei folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) zugleich erfüllen. (Abitur 2019 Teil 1)

- (1) $|\vec{a}| = 2 \cdot |\vec{b}|$
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- (3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 18$



20.0 Familie Brunner besitzt ein Grundstück mit einer Rasenfläche in Hanglage. Um sich aufgrund seines fortgeschrittenen Alters das Rasenmähen zu erleichtern, plant Herr Brunner den Kauf eines Rasenmäroboters. Für die Auswahl eines geeigneten Mähroboters möchte er vorab einige Kriterien überprüfen, um anhand von Datenblättern ein passendes Gerät auszuwählen. Hierfür legt Herr Brunner ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 fest, in dem sich die ebene, viereckige Rasenfläche durch die Eckpunkte $A(30|1|2)$, $B(0|0|0)$, $C(1|-15|5)$ und $D(31|-14|7)$ beschreiben lässt. Herr Brunner wählt dabei die x_3 -Achse so, dass die x_3 -Koordinate die Höhe eines Ortes auf der Rasenfläche gegenüber der horizontalen x_1 - x_2 -Ebene angibt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf das Mitführen von Einheiten kann bei der Berechnung verzichtet werden.
(Abitur 2019 Teil 2 GI)

20.1 Die Rasenfläche muss mit einem Begrenzungsdraht umfasst werden. Prüfen Sie, ob es sich bei der Rasenfläche um ein Rechteck handelt und berechnen Sie die Mindestlänge des Begrenzungsdrahtes. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Meter.

20.2 Dem Datenblatt eines Mähroboters des Modells Steinbock entnimmt Herr Brunner, dass die korrekte Funktionsweise dieses Modells für Steigungen am Hang bis zu 35 % gewährleistet ist. Prüfen Sie, ob das gewünschte Modell demnach zum Mähen der beschriebenen Rasenfläche geeignet ist.

20.3 Der Mähroboter aus 20.2 schafft es, mit einer Akkuladung eine Rasenfläche mit 120 m^2 Flächeninhalt in zwei Stunden zu mähen. Die anschließende Ladezeit für einen Ladezyklus beträgt 1,5 Stunden. Ermitteln Sie die Zeitdauer bis die gesamte Rasenfläche gemäht ist, wenn der Mähroboter zu Beginn vollständig geladen ist und etwaige Zeitverluste, z.B. durch das Zurückfahren des Mähroboters zur Ladestation, unberücksichtigt bleiben. Runden Sie sinnvoll.

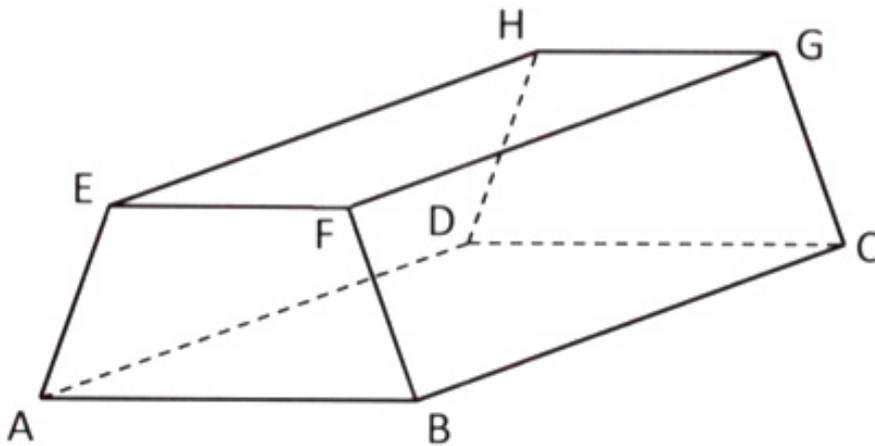
21.0 Für die Vektoren \vec{a}_k, \vec{b} und \vec{c} mit $k \in \mathbb{R}$ im \mathbb{R}^3 gilt:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Abitur 2020 Teil 1})$$

21.1 Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des von den Vektoren \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Dreiecks.

21.2 Ermitteln Sie, für welchen Wert von k die Vektoren \vec{a}_k, \vec{b} und \vec{c} linear abhängig sind.

22.0 Die Abbildung zeigt ein Prisma, bei dem die beiden parallelen und deckungsgleichen Trapeze ABFE und DCGH senkrecht auf der Grundfläche ABCD stehen.
(Abitur 2020 Teil1)

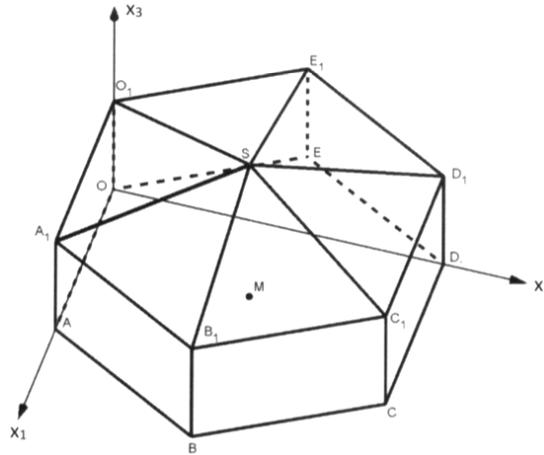


22.1 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:

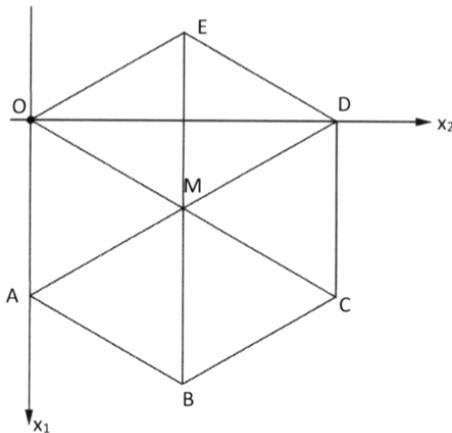
„Das Volumen des Prismas berechnet sich mittels der Formel $V = \left| \overrightarrow{AD} \circ \left(\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AB} \right) \right|$.“

22.2 Begründen Sie anhand des beschriebenen Prismas, wie viele Lösungen die Gleichung $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{HG} = \vec{0}$ mit den Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ besitzt.

23.0 Das Zelt eines Jugendzirkus weist die Form eines regelmäßigen Prismas mit aufgesetzter Pyramide auf und wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 betrachtet. Die Grundfläche des Zeltes liegt in der x_1 - x_2 -Koordinatenebene und ist ein regelmäßiges Sechseck $OABCDE$ mit dem Mittelpunkt $M(3|3\sqrt{3}|0)$. Die Seiten des Sechsecks sind jeweils 6 m lang. Der Punkt O liegt im Koordinatenursprung, A hat die Koordinaten $(6|0|0)$ und A_1 die Koordinaten $(6|0|4)$. Das Dach des Zeltes wird durch eine regelmäßige sechseckige Pyramide gebildet. Die Spitze S des Zeltes liegt senkrecht über M in einer Höhe von 6 m. Die Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden. (Abitur 2020 Teil 2 GI)



Zusätzlich zeigt die folgende Zeichnung den Grundriss des Zeltes in der x_1 - x_2 -Ebene.



23.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B , C und C_1 .

23.2 Für das Zelt und die Zirkuswagen wird eine Stellfläche benötigt, die 2,5-mal so groß ist wie die Grundfläche des Zirkuszeltes. Ein Landwirt stellt dem Zirkus eine Wiese mit einer Flächen von 240 m^2 zur Verfügung. Prüfen Sie, ob diese Fläche groß genug ist. (Teilergebnis: $A_{\text{Zelt}} = 93,53 \text{ m}^2$)

24 Im \mathbb{R}^3 sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bestimmen Sie einen Vektor \vec{c} , der senkrecht zu \vec{a} und \vec{b} steht und begründen Sie ohne Rechnung, ob die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Überprüfen Sie auch, ob die Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht aufeinander stehen. (Abitur 2021 Teil 1)

25.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die drei Punkte $A(2|0|0)$, $B(5|0|0)$ und $C(4|1|-1)$ gegeben. (Abitur 2023 Teil 1)

25.1 Zeigen Sie, dass der Winkel an der Ecke C im Dreieck ABC rechtwinklig ist.

25.2 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Lösungen

$$1.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1.2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1.3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$2.1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 52 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nicht kollinear}$$

$$2.2 \begin{pmatrix} 4,5 \\ -2,6 \\ -1,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -54 \\ 31,2 \\ 21,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kollinear}$$

3.1

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-3b \\ 12-6a \\ ab-8 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 12-3b \\ 12-6a \\ ab-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{(I)} \Rightarrow b = \frac{11}{3} \quad \text{(II)} \Rightarrow a = \frac{11}{6} \quad \text{(III)} \Rightarrow c = -\frac{23}{18}$$

3.2

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3a \\ 6-3a \\ a^2-4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 6-3a \\ 6-3a \\ a^2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b+6 \\ -3c+6 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow a^2 - 4 = a - 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1 \quad a_2 = 2$$

$$a = -1: \text{(II)} \Rightarrow c = -1 \quad \text{(I)} \Rightarrow b = 1$$

$$a = 2: \text{(II)} \Rightarrow c = 2 \quad \text{(I)} \Rightarrow b = -2$$

4.1

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$$

\Rightarrow Die Vektoren sind linear abhängig

4.2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -18$$

⇒ Die Vektoren sind linear unabhängig

5.1

Gegenbeispiel:

$$2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.2

Gegenbeispiel:

$$(2+3) \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$5.3 \quad (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{u} = -\vec{u} \times (\vec{r} + \vec{s}) = -(\vec{u} \times \vec{r} + \vec{u} \times \vec{s}) = -\vec{u} \times \vec{r} - \vec{u} \times \vec{s} = \vec{r} \times \vec{u} + \vec{s} \times \vec{u}$$

$$5.4 \quad \vec{u} \times (\vec{r} + \vec{s}) = \vec{u} \times \vec{r} + \vec{u} \times \vec{s} = -\vec{r} \times \vec{u} - \vec{s} \times \vec{u}$$

6.1 Falsch. 6.2 Falsch. 6.3 Richtig. 6.4 Falsch. 6.5 Richtig.

$$7.1 \quad \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

7.2 Auf der linken Seite wird ein Vektor mit einer Zahl mittels Vektorprodukt verknüpft, was nicht definiert ist.

$$7.3 \quad \vec{a} \times (\vec{b} - 2\vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times 2\vec{c}$$

7.4 Auf der linken Seite ergibt sich als Ergebnis ein Vektor, auf der rechten Seite eine Zahl.

$$7.5 \quad \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{a} + \vec{b})$$

$$7.6 \quad \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c})$$

8.1

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-0,5/2,5/2)$$

Schnittwinkel der Diagonalen:

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - 3 + 8 = 8$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34} \quad |\vec{BD}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{6}} \approx 0,56011 \Rightarrow \varphi \approx 55,94^\circ$$

8.2

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

9

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -92 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{8464+64+144} = \sqrt{8672}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8672} \approx 46,56 \text{ FE}$$

10

$$A_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow V_{\text{Spat}} = |6| = 6 \text{ VE}$$

Oberfläche des Spats: $2 \cdot (|\vec{a} \times \vec{b}| + |\vec{a} \times \vec{c}| + |\vec{b} \times \vec{c}|)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 6 \quad |\vec{a} \times \vec{c}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow O = 2 \cdot (6 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = 12 + 10\sqrt{2} \approx 26,14 \text{ FE}$$

11

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = \begin{pmatrix} 140 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 840 - 10 = 830$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 830 = 138 \frac{1}{3} \text{ VE}$$

12

$$V_{\text{Vierseitige Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = -18 + 26 - 49 = -41$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 41 = 13 \frac{2}{3} \text{ VE}$$

13

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{OA} \times \vec{OB}) \circ \vec{OC}_k|$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{OA} \times \vec{OB}) \circ \vec{OC}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = 4k - 4 - 2k = 2k - 4$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |2k - 4| = 1 \text{ VE} \quad \Rightarrow |2k - 4| = 6$$

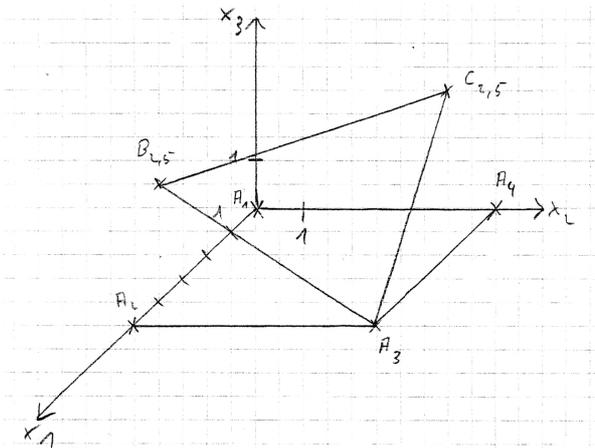
1) $2k - 4 = 6 \quad \Rightarrow k = 5$
 2) $2k - 4 = -6 \quad \Rightarrow k = -1$

14.1

$$\overline{A_3 B_k} = \overline{A_3 C_k} = \overline{B_k C_k} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{26 + k^2} = \sqrt{32} \Rightarrow k^2 = 6 \Rightarrow (k_1 = -\sqrt{6}) \quad k_2 = \sqrt{6}$$

14.2



14.3

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{A_3 B_{2,5}} \times \overrightarrow{A_3 C_{2,5}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -24 \end{pmatrix} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{100 + 100 + 576} = \sqrt{194}
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Sonnensegels beträgt $\sqrt{194} \approx 13,93\text{m}^2$.

15.1

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB_k} &= \begin{pmatrix} k-1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} k-1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow -2k+2-9+6=0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

15.2

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB_k} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -15 \\ -2k-4 \\ 3k-9 \end{pmatrix} \\
 F(k) &= \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB_k} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-15)^2 + (-2k-4)^2 + (3k-9)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225 + 4k^2 + 16k + 16 + 9k^2 - 54k + 81} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13k^2 - 38k + 322}
 \end{aligned}$$

Die Fläche ist minimal, wenn $13k^2 - 38k + 322$ minimal wird;

Absolutes Minimum beim Scheitel, da nach oben geöffnete Parabel;

$$\Rightarrow k_{\min} = -\frac{-38}{2 \cdot 13} = \frac{19}{13}$$

16.1

B(8/0/5) C(8/10/5) H(4/10/8) G(4/0/8)

$$A_{\text{Dachfläche}} = \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BG} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2500} = 50 \text{ m}^2$$

16.2

$$V = A_{IKJ} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\vec{KI} \times \vec{KJ}| \cdot |\vec{JM}|$$
$$\vec{KI} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,4 \end{pmatrix} \quad \vec{KJ} = \begin{pmatrix} -2,4 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \vec{JM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{KI} \times \vec{KJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2,4 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,36 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 2 = 3,36 \text{ m}^3$$

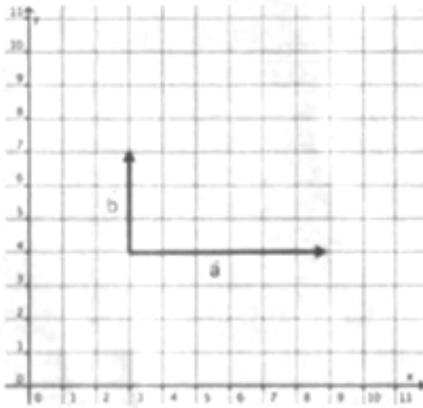
17

$$A = \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_4} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{225} = 15 \text{ m}^2$$

$$\left| \overrightarrow{P_1 P_3} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{122} \approx 11,05 \text{ m} \quad \left| \overrightarrow{P_2 P_4} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18} \approx 4,24 \text{ m}$$

$$18 \quad \vec{v} = \vec{EI} \times \vec{EK} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19



20.1

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -30 + 15 - 10 = -25$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ steht nicht senkrecht auf \overrightarrow{BC}

$\Rightarrow ABCD$ kann kein Rechteck sein

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{900 + 1 + 4} = \sqrt{905} \quad \left| \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{1 + 225 + 25} = \sqrt{251}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{905} + 2 \cdot \sqrt{251} \approx 91,85$$

Die Mindestlänge des Begrenzungsdrahtes müsste 92 m betragen.

20.2

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} -35 \\ 148 \\ 451 \end{pmatrix} = \vec{n}_R$$

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} -35 \\ 148 \\ 451 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{475,95 \cdot 1} \approx 0,9476 \Rightarrow \varphi \approx 18,63^\circ$$

$$\tan(18,63^\circ) = 0,3372 \quad 33,72 \%$$

Das Modell Steinbock ist für diese Rasenfläche geeignet.

20.3

$$A_{\text{Rasen}} = |\vec{AB} \times \vec{BC}| \approx 476 \text{ m}^2 \text{ (siehe 20.2)}$$

$$476 : 120 \approx 3,97 \Rightarrow 4 \text{ Mähzyklen und } 3 \text{ Ladezyklen}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1,5 = 12,5 \text{ Stunden}$$

$$21.1 \quad A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+4+4} = \frac{3}{2}$$

21.2

$$\vec{a}_k \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 - 4k$$

$$\Rightarrow -1 - 4k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

22.1 Falsch. Mit $V = \left| \vec{AD} \circ (\vec{AE} \times \vec{AB}) \right|$ wird das Spatvolumen des durch \vec{AD} , \vec{AE} und \vec{AB} aufgespannten Spats berechnet.

22.2 Da \vec{AB} und \vec{HG} parallel zueinander sind, sind die drei Vektoren linear abhängig und damit die Gleichung für λ_1 , λ_2 und λ_3 unendlich viele Lösungen.

23.1

$$B(9|3\sqrt{3}|0) \quad \vec{BM} = 6 \text{ wegen regelmäßigem Sechseck OABCDE}$$

$$\vec{OC} = 2 \cdot \vec{OM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C(6|6\sqrt{3}|0) \Rightarrow C_1(6|6\sqrt{3}|4)$$

23.2

$$A_{\text{Grundfläche Zelt}} = 6 \cdot A_{\Delta ABM}$$

$$A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AM}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Grundfläche Zelt}} = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \approx 93,53 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow 93,53 \text{ m}^2 \cdot 2,5 \approx 233,83 \text{ m}^2 < 240 \text{ m}^2 \Rightarrow \text{Platz reicht aus}$$

24

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

\vec{a} und \vec{b} sind keine Vielfache voneinander und \vec{c} steht senkrecht

auf den Vektoren \vec{a} und $\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und \vec{c} linear unabhängig

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und \vec{c} bilden eine Basis des \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 - 5 = -7 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und \vec{b} stehen nicht aufeinander senkrecht

25.1

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CA} \circ \vec{CB} = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{rechter Winkel an der Ecke C}$$

25.2

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{CA} \times \vec{CB}| \quad \vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18}$$

$$\text{Alternative: } A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \quad |\vec{CA}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad |\vec{CB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18}$$